

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

**Fonctions de perte appliquées au modèle
de Black-Scholes : théorie et évidence empirique**

Damien Chambre

Département de sciences économiques

Rapport de recherche présenté pour l'obtention
du grade de maîtrise ès sciences (M.Sc.)

Août 2008

Résumé

Nous cherchons à déterminer selon quelle méthode d'estimation des paramètres et selon quelle fonction de perte, l'erreur de prévision est minimisée. Pour le modèle de Black-Scholes, nous constatons que l'erreur de prévision est la plus faible en utilisant la méthode des moments généralisés au stade de l'estimation et la fonction de perte "Mean Absolute Error" au stade de l'évaluation. Nous constatons aussi que l'erreur de prévision diminue à mesure que l'échéance de l'option est proche.

Table des matières

Résumé	2
Table des matières	3
Tableaux et graphiques	4
Remerciements	5
I Introduction	6
II Revue de la littérature	6
III Analyse théorique	9
III.1 Description des instruments utilisés	9
III.1.1 Le modèle de valorisation d'options	9
III.1.1.1 Les fondements	9
III.1.1.2 Le modèle de Black-Scholes et le modèle ad-hoc de Black-Scholes (PBS)	9
III. 1.2 La fonction de volatilité	11
III.1.3 Les fonctions de perte	11
III.1.3.1 Les fonctions de perte "Mean Square Error" (MSE) et "Implied Volatility Mean Square error" (IVMSE)	12
III.1.3.2 La fonction de perte "Mean Absolute Error" (MAE)	12
III.1.3.3 La fonction de perte "Linear-Exponential" (LINEX)	13
III.2 Obtention des volatilités implicites	13
III.2.1 Pour la volatilité implicite observée	13
III. 2.2 Pour la volatilité implicite estimée	14
IV Sélection de l'indice boursier et utilisation de la base de données	16
IV.1 Sélection de l'indice sous-jacent	16
IV.2 La base de données Optometrics	16
IV.3 Filtrage des données	17
V Analyse empirique	17
V.1 Préambule à l'analyse des résultats	17
V.2 Analyse des Résultats	19
V.3 Le modèle autorégressif avec hétéroscédasticité conditionnelle, GARCH(1,1)	21
VI Conclusion	24
Annexes	25
Références	32

Tableaux et graphiques

Tableau 1 : Test de racine unitaire (ADF) par variable explicative	18
Tableau 2 : Erreur de prévision moyenne selon les différentes méthodes d'estimation des paramètres et d'évaluation du modèle de valorisation d'options	19
Tableau 3 : Paramètres estimés et erreur de prévision pour le modèle homoscédastique et le modèle GARCH(1,1)	22
Graphique 1 : Erreur de prévision avec la fonction de perte LINEX pour différentes valeurs du paramètre α et pour les 3 méthodes d'estimation	20
Graphique 2 : Erreur de prévision en fonction du temps pour le modèle GARCH (1,1)	23

Remerciements

Je tiens à remercier Mme Marine Carrasco, ma directrice de recherche, pour ses conseils éclairés et sa disponibilité, Mme Silvia Gonçalves en sa qualité de lectrice et le département de sciences économiques de l'Université de Montréal pour les moyens mis à ma disposition.

I Introduction

Notre champ de recherche s'inscrit dans l'étude des erreurs de prévision résultant du modèle de valorisation d'options de Black-Scholes. Plus précisément, l'on sait qu'une fonction de perte permet de représenter la perte associée à une erreur de prévision. Nous savons aussi qu'il existe plusieurs formes de fonction de perte pour prendre en compte certaines caractéristiques, comme l'importance donnée aux valeurs extrêmes ou l'asymétrie. Ce qui aboutit à des erreurs de prévision différentes selon la fonction de perte employée. Parallèlement, l'emploi de plusieurs méthodes d'estimation entraîne des estimateurs des paramètres de la fonction de volatilité différents et aboutit aussi à des erreurs de prévision différentes. Dès lors, le niveau d'erreur va varier en fonction des choix fait par le praticien.

La contribution de cette recherche est de déterminer quelle méthode employer, au niveau de l'estimation des paramètres de la fonction de volatilité, et quelle fonction de perte utiliser, au niveau de l'évaluation du modèle, pour minimiser l'erreur de prévision. Notre motivation est d'obtenir des résultats plus efficaces en employant des méthodes d'estimation autres que les moindres carrés ordinaires.

Ci-dessous, nous résumons les écrits pertinents sur les méthodes à utiliser au niveau de l'estimation des paramètres et sur les fonctions de perte à utiliser au stade de l'évaluation du modèle. Ensuite, nous révisons les instruments employés qui sont le modèle de valorisation d'options de Black-Scholes, la fonction de volatilité retenue et les fonctions de perte utilisées, c'est à dire les fonctions de perte "Mean Square Error", "Mean Absolute Error" et "Linear-Exponential". De plus, nous décrivons la méthodologie pour obtenir la volatilité implicite observée et la volatilité implicite estimée. Concernant l'obtention de la volatilité estimée, nous exposons les différentes méthodes d'estimation employées qui sont la méthode des moindres carrés ordinaires, la méthode des moments généralisés et la méthode du maximum de vraisemblance. Nous analysons les résultats obtenus et ensuite nous traitons le modèle autorégressif avec hétéroscédasticité conditionnelle, GARCH (1,1), pour la fonction de volatilité. Finalement, nous synthétisons nos discussions et concluons.

II Revue de la littérature

Précisons d'emblée que notre recherche porte uniquement sur le modèle de Black-Scholes. Ici, nous évoquons des modèles de valorisation d'options autres que celui de Black-Scholes, essentiellement pour avoir une meilleure compréhension des écrits présentés. Ci-après, nous revoyons la littérature sur les méthodes d'estimation et les fonctions de perte à utiliser, aux stades de l'estimation et de l'évaluation.

Bakshi, Cao et Chen (1997) se concentrent sur plusieurs modèles de valorisation d'options, c'est à dire le modèle de Black-Scholes et différents modèles à volatilité stochastique. Leurs travaux portent sur les calls sur le S&P 500 pour la période de juin 1988 à mai 1991. Pour estimer les paramètres, les auteurs utilisent une procédure assimilable à la méthode des moindres carrés non linéaires. Les auteurs répètent l'opération pour chaque jour de transaction. Ils constatent une amélioration significative de l'ajustement comparativement aux méthodes des moments généralisés et du maximum de vraisemblance. Les résultats obtenus permettent de constater que le modèle Black-Scholes a tendance à produire une volatilité implicite plus faible pour l'échantillon comprenant toutes les options et l'échantillon comprenant seulement les options à court terme. En revanche, ce n'est pas le cas pour l'échantillon des options à la monnaie. Pour l'évaluation de chaque modèle, les auteurs utilisent une mesure d'erreur, en terme nominal, basée sur la couverture.

Chernov et Ghysels (2000) axent leur recherche sur les calls sur le S&P 500, pour la période de novembre 1985 à octobre 1994. Ils se basent sur le modèle de valorisation d'options d'Heston. Pour l'estimation des paramètres, les auteurs utilisent la méthode des moments efficaces. L'estimation des paramètres se fait en deux étapes. Premièrement, ils estiment la densité semi non-paramétrique, en accord avec la procédure de Gallant et Tauschen (1996), pour trois séries de données qui sont le logarithme des rendements du S&P 500, le logarithme des volatilités implicites obtenues à partir du modèle de Black-Scholes et les deux conjointement. Deuxièmement, ils estiment les paramètres du modèle par la méthode des moments efficaces, pour les trois séries de données, en utilisant la densité estimée à la première étape. Ils constatent que le modèle estimé, à partir des deux séries de données conjointement, produit une amélioration en terme d'ajustement. Pour obtenir les erreurs de prévision, ils utilisent la fonction de perte \$MSE, exprimée en terme nominal, et la fonction de perte %MSE, exprimée en terme relatif, que nous définissons plus tard à la section III.1.3.1.

Pan (2002) s'intéresse à la prime de risque des options sur le S&P 500. Il utilise un échantillon allant de janvier 1989 à décembre 1996. L'auteur part du constat que les rendements des options sur le S&P500 sont affectés par 3 facteurs de risque principaux qui sont les chocs de prix, les sauts de prix et les chocs de volatilité. Pour analyser ces variations, l'auteur introduit un facteur d'escompte stochastique et utilise un modèle à volatilité stochastique et à taux d'intérêt stochastique, tiré de Bates (2000), pour identifier les dynamiques des facteurs de risque. Pour estimer les paramètres du modèle, l'auteur utilise une méthode d'estimation dérivée de la méthode des moments généralisés qu'il nomme la méthode des moments généralisés-état implicite (MMG-IS). Ainsi, l'auteur prend en compte la traçabilité des variables d'état qui sont l'actif sous-jacent et la volatilité. La différence avec la méthode des moments généralisés est que la volatilité du sous-jacent n'est pas observée directement. Le motif principal de l'auteur, pour utiliser la

méthode MMG-IS, est de pouvoir se concentrer directement sur les dynamiques jointes des variables d'état plutôt que sur les variables de marché observables. Pour l'évaluation des différents modèles, l'auteur utilise la fonction de perte IVMSE que nous définissons plus tard à la section III.1.3.1.

Benzoni (2002) se concentre sur les propriétés empiriques de deux types de modèles qui sont une extension du modèle de Black-Scholes standard incluant un facteur de volatilité stochastique et le modèle log-variance dérivé de l'E-GARCH de Nelson (1991). L'auteur utilise des données sur les rendements du S&P 500 et sur les calls sur le S&P 500. Pour l'estimation des paramètres, l'auteur procède en deux étapes. Premièrement, il estime le modèle semi non-paramétrique par quasi maximum de vraisemblance pour les rendements journaliers du S&P 500. Dans ce but, il estime préalablement un MA(1) sur les rendements et utilise les résidus dans l'estimation du modèle semi non-paramétrique. Ce qui permet d'obtenir les conditions de moments à partir de la prévision des scores semi non-paramétriques. Deuxièmement, à partir des conditions de moments, l'auteur estime les paramètres par la méthode des moments efficaces. Pour l'évaluation, l'auteur utilise les fonctions de perte \$MSE et %MSE.

Christoffersen et Jacobs (2002) s'intéressent à deux méthodes d'estimation des paramètres qui sont les moindres carrés ordinaires (MCO) et les moindres carrés non linéaires (MCNL). Ce qu'ils définissent comme équivalent à employer les fonctions de perte IVMSE, pour les MCO, et \$MSE et %MSE, pour les MCNL, au stade de l'estimation des paramètres. Les auteurs comparent ensuite les fonctions de perte IVMSE, \$MSE et %RMSE au stade de l'évaluation du modèle. Ils s'intéressent alors à déterminer si il est préférable d'utiliser des fonctions de perte identiques ou différentes, au stade de l'estimation et au stade de l'évaluation. Leur étude porte sur les calls sur le S&P 500 pour une période allant de juin 1988 à mai 1991. Pour le modèle de Black-Scholes, les auteurs trouvent que l'erreur de prévision est la plus faible, lorsqu'ils utilisent une fonction de perte identique aux deux stades (ex. MCO pour l'estimation et IVMSE pour l'évaluation). En revanche, l'erreur de prévision augmente quand ils utilisent des fonctions de perte différentes (ex. MCO pour l'estimation et \$MSE pour l'évaluation). Les auteurs ne concluent pas puisque les résultats ne sont pas directement comparables. En effet, IVMSE se rapporte à la volatilité alors que \$MSE et %MSE se rapportent au prix de l'option. Aussi, \$MSE est exprimée en terme nominal alors que %MSE est exprimée en terme relatif. Plus généralement, les auteurs soutiennent l'idée de ne pas imposer des normes dans l'utilisation des fonctions de perte. En revanche, les auteurs avancent le fait qu'il est crucial de maintenir une cohérence dans le choix des fonctions de perte employées.

III Analyse théorique

III.1 Description des instruments utilisés

III.1.1 Le modèle de valorisation d'options

III.1.1.1 Les fondements

Un certain nombre de modèles de valorisation d'options ont été développés antérieurement au modèle de Black-Scholes. Ces formules restaient incomplètes du fait de l'utilisation de paramètres fixés arbitrairement. Chen (1970) développe un modèle de valorisation d'options, particulièrement abouti, proche de la conception de Black-Scholes. L'auteur exprime la valeur espérée de l'option au temps t , tel que :

$$VEO_t = \begin{cases} \int_K^\infty (S_t - K)f(S_t)dS_t & t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases} \quad (1)$$

avec VEO_t : la valeur espérée de l'option au temps t ; T : l'échéance de l'option ; S_t : le prix de marché de l'actif sous-jacent ; K : le prix d'exercice de l'option ; $f(S_t)$: la densité de probabilité de S_t . La valeur présente de l'option aujourd'hui est donnée par :

$$VPO(t) = e^{-rt}VEO_t = e^{-rt} \int_K^\infty (S_t - K)f(S_t)dS_t \quad (2)$$

III.1.1.2 Le modèle de Black-Scholes et le modèle ad-hoc de Black-Scholes (PBS)

À partir de ces fondements, Black et Scholes (1973) développent leur modèle pour valoriser les options européennes sur les actions. Leur modèle repose sur le principe de l'évaluation neutre au risque. C'est-à-dire que les investisseurs sont neutres au risque. Il n'y a donc pas de prime de risque associée à la différence entre le taux d'intérêt sans risque, offert par la banque, et le rendement espéré sur l'investissement risqué. À ceci s'ajoutent les hypothèses habituelles d'absence d'opportunités d'arbitrage, d'absence de coûts de transaction, d'autorisation des ventes à découvert et d'actifs sous-jacents complètement divisibles. Nous basons notre développement sur la démonstration de Nordstad (2005). Posons que le prix de l'actif sous-jacent, à l'échéance T , est donné par $S(T) = Se^{\mu T + \sigma B}$, avec $B \sim N(0, T)$. Définissons μ la moyenne de l'actif sous-jacent sur la période T et σ la volatilité de l'actif sous-jacent, c'est-à-dire la volatilité observée de l'indice S&P 500. Avec $B = \sqrt{T}Y$, nous obtenons $S(T) = Se^{\mu T + \sigma \sqrt{T}Y}$, où $Y \sim N(0, 1)$.

Finalement, soit K le prix d'exercice de l'option et r le taux sans risque, à partir de la définition de la valeur du call aujourd'hui, nous avons :

$$C = e^{-rT} E(\max(s(T) - K, 0)) \quad (3)$$

$$C = e^{-rT} E(\max(S e^{\mu T + \sqrt{T} Y} - K, 0)) \quad (4)$$

$$C = e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} \max(S e^{\mu T + \sqrt{T} Y} - K, 0) f(y) dy \quad (5)$$

$$C = e^{-rT} \int_z^{\infty} (S e^{\mu T + \sigma \sqrt{T} Y} - K) f(y) dy \quad (6)$$

où $z = \left(\frac{\log(K/S) - \mu T}{\sigma \sqrt{T}} \right)^2$, avec $y > z$, c'est-à-dire que le call expire dans la monnaie. En développant l'équation (6), nous retrouvons la formule standard de Black-Scholes :

$$C = S \Phi \left(\frac{\log(S/K) + (r + 1/2 \sigma^2) T}{\sigma \sqrt{T}} \right) - e^{-rT} K \Phi \left(\frac{\log(S/K) + (r - 1/2 \sigma^2) T}{\sigma \sqrt{T}} \right) \quad (7)$$

Dans nos travaux, le taux sans risque utilisé est le taux du bond du trésor à 3 mois de la réserve fédérale américaine, calculé quotidiennement. Ajoutons que nous faisons l'hypothèse que l'indice S&P 500 verse un dividende constant. Comme Chernov et Ghysels (2000), nous utilisons un dividende de 2%. Finalement, la formule de Black-Scholes est donnée par :

$$C = S \Phi \left(\frac{\log(S/K) + (r - q + 1/2 \sigma^2) T}{\sigma \sqrt{T}} \right) - e^{-rT} K \Phi \left(\frac{\log(S/K) + (r - q - 1/2 \sigma^2) T}{\sigma \sqrt{T}} \right) \quad (8)$$

où q est le rendement de l'indice boursier S&P 500. Le modèle de Black-Scholes repose sur l'hypothèse que la volatilité est un paramètre constant. Dans notre recherche, le modèle ad-hoc de Black-Scholes (PBS) employé relâche cette hypothèse. Pour la valorisation de l'option, le modèle PBS consiste simplement à remplacer le paramètre σ^2 par la valeur ajustée obtenue à partir de la fonction de volatilité retenue, $\hat{\sigma}^2(\theta)$. La forme générale du modèle PBS est donné par :

$$C = S \Phi \left(\frac{\log(S/K) + (r - q + 1/2 \hat{\sigma}^2(\theta)) T}{\sigma(\theta) \sqrt{T}} \right) - e^{-rT} K \Phi \left(\frac{\log(S/K) + (r - q - 1/2 \hat{\sigma}^2(\theta)) T}{\sigma(\theta) \sqrt{T}} \right) \quad (9)$$

où $\hat{\sigma}^2(\theta)$ est la valeur ajustée tirée de la fonction de volatilité définie ci-après.

III.1.2 La fonction de volatilité

Empiriquement, la littérature constate que l'hypothèse de volatilité constante, relative au modèle de Black-Scholes standard, n'est pas respectée. En effet, on observe que la volatilité implicite, calculée à partir du modèle de Black-Scholes, varie en fonction de l'échéance et du prix d'exercice. On observe aussi que la volatilité est supérieure pour les options légèrement dans la monnaie ou en dehors de la monnaie, par rapport aux options à la monnaie. Dumas, Fleming et Whaley (1998) remarquent que lorsqu'on utilise un modèle de valorisation d'options, sous l'hypothèse d'une volatilité stochastique, la valorisation de l'option nécessite un prix de marché pour chaque paramètre de risque employé. Ce qui se révèle difficile à estimer. En revanche, les auteurs constatent que sous l'hypothèse d'une fonction de volatilité déterministe de l'échéance (T) et du prix d'exercice (K), la valorisation de l'option selon Black-Scholes se révèle consistante. Les auteurs proposent principalement trois types de fonction de volatilité qui sont :

$$\text{modèle (a)} : \sigma^2 = \max(0,01; \theta_0 + \theta_1 K + \theta_2 K^2) \quad (10)$$

$$\text{modèle (b)} : \sigma^2 = \max(0,01; \theta_0 + \theta_1 K + \theta_2 K^2 + \theta_3 T + \theta_4 KT) \quad (11)$$

$$\text{modèle (c)} : \sigma^2 = \max(0,01; \theta_0 + \theta_1 K + \theta_2 K^2 + \theta_3 T + \theta_4 T^2 + \theta_5 KT) \quad (12)$$

où K est le prix d'exercice et T l'échéance du call S&P 500. Nous prenons en compte uniquement les volatilités strictement positives, à travers notre filtrage des données. Ainsi, nous nous concentrons sur 3 modèles dérivés de DFW (1998), soit :

$$\text{modèle 1} : \sigma^2(\theta) = \theta_0 + \theta_1 K + \theta_2 K^2 + u \quad (13)$$

$$\text{modèle 2} : \sigma^2(\theta) = \theta_0 + \theta_1 K + \theta_2 K^2 + \theta_3 T + \theta_4 KT + u \quad (14)$$

$$\text{modèle 3} : \sigma^2(\theta) = \theta_0 + \theta_1 K + \theta_2 K^2 + \theta_3 T + \theta_4 T^2 + \theta_5 KT + u \quad (15)$$

où u représente un terme d'erreur. Dans notre étude, nous retenons le modèle 3. Les raisons de ce choix sont développées à la section V.3.

III.1.3 Les fonctions de perte

Une fonction de perte mesure la perte associée à une erreur de prévision, soit la différence entre la valeur prédite et la vraie valeur d'une variable. Il existe plusieurs

formes de fonction de perte pour prendre en compte différentes caractéristiques, comme l'importance donnée aux valeurs extrêmes.

III.1.3.1 Les fonctions de perte "Mean Square Error" (MSE) et "Implied Volatility Mean Square error" (IVMSE)

MSE est égale à la moyenne des carrés de la différence entre le prix du call observé et le prix du call estimé à partir du modèle de Black-Scholes, soit :

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(C_i - C_i(\sigma^2(\theta)) \right)^2, i=1, \dots, n \quad (16)$$

où C_i est le prix du call observé et $C_i(\sigma^2(\theta))$ le prix du call valorisé avec le modèle de Black-Scholes. MSE entre dans la catégorie des fonctions de perte linéaires. De plus, MSE est symétrique, allouant le même poids aux erreurs de prévision positives et négatives et aux erreurs de prévision extrêmes. Cette fonction de perte est exprimée en terme nominal. Une alternative est d'exprimer l'erreur de prévision en terme relatif. Par exemple, pour la fonction de perte MSE, il s'agit de la fonction de perte %MSE. La forme de la fonction de perte %MSE est donnée par :

$$\%MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{C_i - C_i(\sigma^2(\theta))}{C_i} \right)^2 \quad (17)$$

En revanche, la fonction de perte IVMSE est basée sur la volatilité. IVMSE est égale à la moyenne des carrés de la différence entre σ_i^2 , la volatilité implicite observée, et $\sigma_i^2(\theta)$, la volatilité implicite estimée obtenue à partir de la fonction de volatilité, soit :

$$IVMSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\sigma_i^2 - \sigma_i^2(\theta))^2 \quad (18)$$

III.1.3.2 La fonction de perte "Mean Absolute Error" (MAE)

MAE correspond à la moyenne des valeurs absolues de la différence entre le prix du call observé, C_i , et le prix du call valorisé avec le modèle Black-Scholes, $C_i(\sigma^2(\theta))$, soit :

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |C_i - C_i(\sigma^2(\theta))| \quad (19)$$

MAE est une fonction linéaire et symétrique qui comme MSE donne un poids identique aux erreurs de prévision positives et négatives. En revanche, MAE alloue moins d'importance aux erreurs de prévision extrêmes que MSE.

III.1.3.3 La fonction de perte "Linear-Exponential" (LINEX)

Cette fonction de perte a été introduite par Varian (1974) et développée par Zellner (1986). LINEX est une fonction quadratique et asymétrique, qui permet de prendre en compte l'asymétrie des erreurs de prévision, soit donner un poids différent aux erreurs négatives et positives. La formule de la fonction LINEX est donnée par :

$$\text{LINEX} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{e^{\alpha(C_i - C_i(\sigma^2(\theta)))} - \alpha(C_i - C_i(\sigma^2(\theta))) - 1}{\alpha^2} \quad (20)$$

où C_i est le prix du call observé et $C_i(\sigma^2(\theta))$ le prix du call valorisé avec le modèle de Black-Scholes. α est le paramètre représentant l'asymétrie de l'information. Lee (2007) explique qu'une propriété importante est que la fonction de perte LINEX devient une fonction de perte quadratique lorsque α tend vers 0. En effet, quand α tend vers 0, le dénominateur et le numérateur tendent vers 0. Par application de la règle de l'Hôpital, l'auteur obtient la forme quadratique. Aussi, pour $\alpha < 0$, le poids donné aux erreurs de prévision négatives (prix du call estimé > prix du call observé) est supérieur au poids donné aux erreurs positives. Donc surévaluer le prix du call est plus coûteux, en termes d'erreurs de prévision, que de le sous-évaluer. Posons $Z = C_i - C_i(\sigma^2(\theta))$, dans ce cas la perte est approximativement exponentielle en Z , pour $Z < 0$, et approximativement linéaire en Z , pour $Z > 0$. Pour $\alpha > 0$, le raisonnement inverse s'applique.

III.2 Obtention des volatilités implicites

III.2.1 Pour la volatilité implicite observée

La volatilité implicite est obtenue à partir du modèle de Black-Scholes, selon la méthode suivante : Premièrement, nous posons que le prix observé de l'option est égal à la formule de Black-Scholes, à laquelle nous avons substitué le prix courant du sous-jacent, le prix d'exercice, l'échéance et le taux sans risque. Par exemple, considérons une observation i avec un prix observé de 2,35\$, un prix courant du S&P 500 de 1416,6\$, un prix d'exercice de l'option de 1505\$, une échéance de 74 jours (0,201 an), un taux de dividende versé de 2% et un taux sans risque de 4,98%. La volatilité implicite observée σ^2 est solution de :

$$2,35 = 1416,6 * \Phi * \left(\frac{\log(1416,6/1505) + (0,0498 - 0,02 + 1/2 \sigma^2) * 0,201}{\sigma \sqrt{0,201}} \right) - e^{-0,0498 * 0,201} * 1505 * \Phi \left(\frac{\log(1416,6/1505) + (0,0498 - 0,02 - 1/2 \sigma^2) * 0,201}{\sigma \sqrt{0,201}} \right) \quad (21)$$

Deuxièmement, il n'y a pas de forme explicite de la solution. Il est donc nécessaire de procéder par une méthode numérique standard d'interpolation pour obtenir la volatilité. Numériquement, la volatilité implicite de l'option ci-dessus est de 9,03%. Pour notre recherche, nous utilisons directement les volatilités implicites fournies par la base de données utilisée et qui sont produites selon cette méthode.

III.2.2 Pour la volatilité implicite estimée

Pour l'estimation des paramètres de la fonction de volatilité, les méthodes d'estimation employées sont : la méthode des moindres carrés ordinaires, la méthode des moments généralisés et la méthode du maximum de vraisemblance. Mentionnons ici, que nous faisons l'hypothèse forte que les paramètres sont constants à travers le temps. Ce qui implique que nous ne faisons pas une estimation des paramètres pour chaque jour de transaction, mais que notre estimation porte directement sur l'ensemble des observations de la période étudiée.

Concernant la **méthode des moindres carrés ordinaires**, le fondement de la méthode revient à déterminer les valeurs des paramètres minimisant la somme des carrés des résidus, soit :

$$\min_{\theta} \sum_{i=1}^N (\sigma_i^2 - \sigma_i^2(\theta))^2 \quad (22)$$

où σ_i^2 est la volatilité implicite observée et $\sigma_i^2(\theta)$ la volatilité implicite estimée en utilisant l'équation (15).

Concernant la **méthode des moments généralisés**, nous considérons divers instruments Z qui sont les variables explicatives K , K^2 , T , T^2 et KT , le volume et les lettres grecques¹, Delta, Gamma, Vega et Theta. Pour le volume, nous employons aussi le volume au carré, le terme d'interaction entre le volume et le prix d'exercice, le terme d'interaction entre le volume et l'échéance et le terme d'interaction entre le volume, le prix d'exercice et l'échéance. Le même raisonnement s'applique pour les lettres

¹ Mesures de risque associées à la détention d'une option. Par exemple, le delta mesure la sensibilité du prix de l'option (C) par rapport à une variation de l'indice S&P 500 (SP), soit : $\delta = \frac{dC}{dSP}$

grecques. Pour être valables, les instruments doivent respecter les conditions suivantes de validité des instruments :

- (a) la condition de pertinence : $\text{corr}(Z_i, X_i) \neq 0$
- (b) la condition d'exogénéité : $\text{corr}(Z_i, u_i) = 0$

Soit $g(.) = (\sigma^2(\theta) - \theta_0 - \theta_1 K - \theta_2 K^2 - \theta_3 T - \theta_4 T^2 - \theta_5 KT - u)Z$, une fonction de la variable dépendante σ , des variables explicatives K , K^2 , T , T^2 et KT , et des paramètres inconnus Θ . Le fondement de la méthode des moments généralisés consiste à rechercher les valeurs des paramètres Θ , pour lesquels la moyenne empirique, $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(\sigma_i, K_i, K_i^2, T_i, T_i^2, KT_i, \Theta)$, tend vers 0. Ainsi, les estimateurs des moments généralisés sont solutions du problème de minimisation suivant :

$$\min_{\Theta} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(\sigma_i^2(\Theta), K_i, K_i^2, T_i, T_i^2, KT_i, \Theta) \right]' S_N^{-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(\sigma_i^2(\Theta), K_i, K_i^2, T_i, T_i^2, KT_i, \Theta) \right] \quad (23)$$

où S_N est une matrice symétrique représentant un estimateur de la matrice de covariance entre les fonctions g .

Concernant la **méthode du maximum de vraisemblance**, le principe consiste à déterminer les paramètres Θ et v qui maximisent le logarithme de la fonction de vraisemblance. Nous utilisons l'équation (15) et une distribution t de Student à 12 degrés de liberté pour le terme d'erreur, soit $u_i \sim t_{12}$. Le nombre de degrés de liberté est celui-ci pour lequel la log-vraisemblance, pour l'échantillon, est la plus élevée. La fonction de vraisemblance pour chaque observation i est donnée par :

$$l_i(\theta, v) = \frac{\Gamma\left(\frac{(v+1)}{2}\right)}{(v\pi)^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left(1 + \frac{(\sigma_i - \theta_0 - \theta_1 K_i - \theta_2 K_i^2 - \theta_3 T_i - \theta_4 T_i^2 - \theta_5 K_i T_i)^2}{v} \right)^{-\frac{(v+1)}{2}} \quad (24)$$

où $v > 0$ est le nombre de degrés de liberté et $\Gamma(.)$ est la fonction Gamma. Nous en déduisons la log-vraisemblance pour chaque observation i , soit :

$$\log l_i(\theta, v) = \log \left(\frac{\Gamma\left(\frac{(v+1)}{2}\right)}{(v\pi)^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \right) + \log \left(\left(1 + \frac{(\sigma_i - \theta_0 - \theta_1 K_i - \theta_2 K_i^2 - \theta_3 T_i - \theta_4 T_i^2 - \theta_5 K_i T_i)^2}{v} \right)^{-\frac{(v+1)}{2}} \right) \quad (25)$$

$$\log l_i(\theta, v) = \log \left(\Gamma\left(\frac{(v+1)}{2}\right) \right) - \log \left((v\pi)^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) \right) - \frac{(v+1)}{2} \log \left(1 + \frac{(\sigma_i - \theta_0 - \theta_1 K_i - \theta_2 K_i^2 - \theta_3 T_i - \theta_4 T_i^2 - \theta_5 K_i T_i)^2}{v} \right) \quad (26)$$

$$\log l_i(\theta, v) = \log \left(\Gamma \left(\frac{(v+1)}{2} \right) \right) - \frac{1}{2} \log(v\pi) - \log \left(\Gamma \left(\frac{v}{2} \right) \right) - \frac{(v+1)}{2} \log \left(1 + \frac{(\sigma_i - \theta_0 - \theta_1 K_i - \theta_2 K_i^2 - \theta_3 T_i - \theta_4 T_i^2 - \theta_1 K_i T_i^2)^2}{v} \right) \quad (27)$$

Le problème de maximisation à résoudre est alors :

$$\max_{\theta, v} \sum_{i=1}^n \left(\log \left(\Gamma \left(\frac{(v+1)}{2} \right) \right) - \frac{1}{2} \log(v\pi) - \log \left(\Gamma \left(\frac{v}{2} \right) \right) - \frac{(v+1)}{2} \log \left(1 + \frac{(\sigma_i - \theta_0 - \theta_1 K_i - \theta_2 K_i^2 - \theta_3 T_i - \theta_4 T_i^2 - \theta_1 K_i T_i^2)^2}{v} \right) \right) \quad (28)$$

Pour prendre en compte l'hétéroscédasticité, nous utilisons avec nos trois méthodes d'estimation des intervalles de confiance robustes à l'hétéroscédasticité. Les estimateurs sont ceux de White (1980) qui sont robustes à l'hétéroscédasticité. Finalement, à partir des paramètres estimés selon les différentes méthodes, nous obtenons les valeurs ajustées pour chaque observation, c'est-à-dire les volatilités implicites estimées.

IV Sélection de l'indice boursier et utilisation de la base de données

IV.1 Sélection de l'indice sous-jacent

Premièrement nous avons considéré le DJI et le S&P500. Le S&P 500, avec une volatilité similaire au DJI, regroupe davantage de firmes que le DJI. De plus les sociétés incluses dans le S&P 500 couvrent l'ensemble des secteurs de l'économie. Le S&P 500 est donc une meilleure approximation du marché américain. Ceci est pertinent dans le cadre de notre recherche pour minimiser le risque inhérent au choix du sous-jacent. De plus, ce choix est en accord avec la littérature existante qui majoritairement utilise des calls sur le S&P 500. L'indice sous-jacent est donc l'indice S&P 500 qui regroupe 500 titres, pondérés par leurs valeurs de marché. Les données journalières utilisées proviennent du site internet du *Chicago Board Options Exchange*.

IV.2 La base de données Optometrics

Pour notre recherche, nous utilisons la base de données *Ivy DB* compilée par *Optometrics*, à partir des données journalières à la clôture produites par *FT Interactive Data*. *Optometrics* fournit pour chaque observation le prix d'exercice, la date d'expiration de l'option, la nature de l'option sur le S&P500 (call ou put), le prix offert et le prix demandé à la clôture de l'option, le dernier jour de transaction, le volume, la volatilité implicite, les lettres grecques Delta, Gamma, Vega et Theta et le numéro d'identification de l'option. Les données journalières utilisées sont comprises entre le 3 janvier 2005 et le 29 juin 2007, soit 420553 observations.

IV.3 Filtrage des données

Tout d'abord, remarquons que le prix des calls sur le S&P 500 n'est pas fourni directement par la base de données *Ivy DB*. C'est pourquoi, nous concevons le prix observé de l'option en faisant la moyenne du prix offert et du prix demandé de l'option à la clôture qui sont eux fournis par la base de données. Nous mettons en place un filtrage pour prendre en compte l'hétérogénéité des données parce que l'échelle des prix observés est large, comprise entre 2,1\$ et 113,8\$. La *distribution des prix observés des calls sur le S&P 500 avant filtrage des données*, est présentée à l'annexe 1. Premièrement, nous considérons seulement les observations pour lesquelles la date de l'observation et la date de dernière transaction sont les mêmes. Ainsi, la volatilité implicite observée est bien celle de la date de l'observation et non celle de la dernière transaction qui peut être différente. Deuxièmement, *Optometrics* ne fournit pas la volatilité implicite pour un certain nombre d'observations car le règlement de l'option n'est pas standard. Nous avons choisi de ne pas prendre en compte ces observations. Troisièmement, en accord avec Bams, Lehnert et Wolf (2004) pour prendre en compte l'illiquidité des options, c'est à dire ne pas considérer les titres qui ne sont pas activement transigés, nous écartons les observations pour lesquelles le prix du call est inférieur à 2\$. Quatrièmement, nous éliminons également les observations pour lesquelles la période jusqu'à l'échéance de l'option est inférieure à 7 jours ou supérieure à 180 jours. Cinquièmement, en accord avec la littérature, et notamment avec Chernov et Ghysels (2000), nous focalisons sur des calls à la monnaie, c'est à dire dont le rapport entre le prix courant du sous-jacent moins le dividende versé et le prix d'exercice $((S-D)/K)$, plus précisément le degré de monnaie, est compris entre 0,97 et 1,03. Au final, le nombre d'observations retenu est de 16028 contre 420553 à l'origine. La *distribution des prix observés des calls sur le S&P 500 après filtrage des données* est présentée l'annexe 2.

V Analyse empirique

V.1 Préambule à l'analyse des résultats

Pour tester la stationnarité des séries, nous utilisons un test de Dickey-Fuller augmenté que nous effectuons sur la série chronologique du call S&P 500 employée à la section V.3. Les résultats sont présentés au tableau 1. Au seuil de 5%, nous rejetons l'hypothèse de racine unitaire, pour la volatilité implicite, le prix d'exercice, l'échéance et pour le prix du call observé. Par contre, nous ne pouvons pas rejeter l'hypothèse de racine unitaire pour le taux d'intérêt et le cours de l'indice boursier S&P 500.

Tableau 1 : Test de racine unitaire (ADF) par variable explicative

Variables explicatives	
IV : Volatilité Implicite	-6,5964*
X : Prix d'exercice	-6,5964*
TJ : Échéance	-49,9047*
CALL : Prix observé	-48,4991*
R : Taux d'intérêt	-1,7087
S : Cours du S&P 500	-1,91868
* rejet de l'hypothèse nulle de racine unitaire au seuil de signification de 5%	

Concernant la sélection des instruments pour la méthode des moments généralisés, premièrement nous avons considéré une large gamme d'instruments qui sont énumérés à la section III.2.2. Pour un certain nombre d'instruments possibles, la condition d'exogénéité relative à la validité des instruments, $\text{corr}(Z_i, u_i) = 0$, n'est pas respectée. Les instruments qui respectent approximativement les deux conditions de validité, qui sont la condition de pertinence, $\text{corr}(Z_i, X_i) \neq 0$, et la condition d'exogénéité sont : les variables explicatives, le volume au carré, le terme d'interaction entre le volume et l'échéance, le terme d'interaction entre le volume, l'échéance et le prix d'exercice, le terme d'interaction entre Delta et l'échéance, le terme d'interaction entre Delta, l'échéance et le prix d'exercice, Vega, Vega au carré, le terme d'interaction entre Vega et le prix d'exercice, le terme d'interaction entre Vega et l'échéance et le terme d'interaction entre Vega, l'échéance et le prix d'exercice. Les corrélations entre les instruments sélectionnés sont présentées à l'annexe 3 : *Corrélations entre les instruments utilisés pour la méthode des moments généralisés*. Concernant la fonction de volatilité, pour estimer les coefficients des variables explicatives, nous utilisons au préalable la méthode des moindres carrés ordinaires pour les 3 modèles. Le modèle 3 produit un ajustement de qualité légèrement supérieure avec un R^2 de 0,0582, comparativement à un R^2 de 0,0354 pour le modèle 1 et un R^2 de 0,0356 pour le modèle 2. De plus, à la vue des résultats présentés à l'annexe 4 : *Paramètres estimés de la fonction de volatilité pour le modèle 3*, nous constatons que le modèle 3 présente des coefficients qui sont tous significatifs au seuil de 5%, en estimant les paramètres avec la méthode des moindres carrés ordinaires. Avec les méthodes des moments généralisés et du maximum de vraisemblance, les coefficients sont également significatifs au seuil de 5%. Remarquons qu'au regard du R^2 , la qualité de l'ajustement est faible, environ 5% pour les trois méthodes d'estimation. Donc une grande partie de la variation de la volatilité ne peut être expliquée par le prix d'exercice et l'échéance. Pour expliquer cette faiblesse d'ajustement, nous pensons en particulier au bruit de marché, généré par les mouvements

spéculatifs qui sont à la fois "créateurs" et "destructeurs" de volatilité, indépendamment du prix d'exercice et de l'échéance. En définitive, nous retenons la fonction de volatilité du modèle 3.

V.2 Analyse des Résultats

Les résultats sont présentés au tableau ci-après. Le détail des erreurs de prévision, pour les différentes méthodes d'estimation et pour les différentes fonctions de perte, est présenté à l'annexe 5 : *Erreurs de prévision par observation pour les méthodes MCO, MMG et MV et pour les fonctions de perte RMSE, MAE et LINEX.*

Tableau 2 : Erreur de prévision moyenne selon les différentes méthodes d'estimation des paramètres et d'évaluation du modèle de valorisation d'options

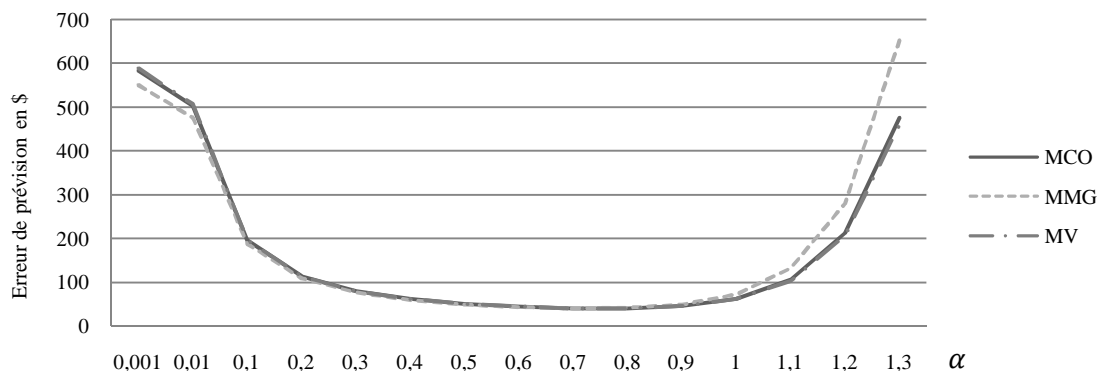
Évaluation du modèle	Méthode d'estimation des paramètres			
		MCO	MMG	MV
	RMSE	34,2804	34,0174	34,3373
	MAE	26,4643	26,1950	26,4771
	LINEX	40,4389	40,8376	40,6497
	α	0,75*	0.74*	0,75*

*le paramètre est fixé à la valeur de α qui minimise la fonction LINEX

Mentionnons ici que nous utilisons la fonction de perte RMSE plutôt que la fonction de perte MSE. Ainsi l'erreur de prévision est exprimée en dollar, comme pour MAE et LINEX, plutôt qu'en dollar au carré pour MSE. Pour les fonctions de perte RMSE et MAE, la méthode d'estimation des paramètres de la fonction de volatilité, qui minimise l'erreur de prévision, est la méthode des moments généralisés. En revanche, pour la fonction de perte LINEX, la méthode d'estimation, qui minimise l'erreur de prévision, est la méthode des moindres carrés ordinaires. Peu importe la méthode d'estimation employée, l'erreur de prévision est la plus faible pour la fonction de perte MAE. Avec la fonction de perte RMSE, l'erreur de prévision est d'approximativement de 7,83\$ de plus que pour la fonction de perte MAE, mais est inférieure à l'erreur de prévision obtenue avec la fonction de perte LINEX d'environ 6,43\$. Pour la fonction de perte MAE par rapport à la fonction de perte LINEX, l'erreur de prévision est inférieure d'environ 14,26\$. Nous rencontrons l'erreur de prévision la plus faible, soit 26,1950\$, en utilisant la méthode des moments généralisés pour l'estimation des paramètres de la fonction de volatilité et la fonction de perte MAE au niveau de l'évaluation du modèle de valorisation d'options. En revanche, l'erreur de prévision est maximale, soit 40,8376\$, quand nous employons la méthode des moments généralisés pour l'estimation des paramètres et la

fonction de perte LINEX pour l'évaluation du modèle. La différence entre l'erreur de prévision minimale et l'erreur de prévision maximale est de 14,6426\$. Nous remarquons également que l'erreur de prévision obtenue avec la fonction LINEX est toujours supérieure à celle obtenue avec les deux autres fonctions de perte, même avec la valeur du paramètre α qui minimise l'erreur de prévision, soit 0,75 pour les méthodes des moindres carrés ordinaires et du maximum de vraisemblance et 0,74 pour la méthode des moments généralisés. Plus généralement, l'erreur de prévision est élevée peu importe la méthode d'estimation utilisée. La raison principale est l'hétérogénéité des échéances, comprises entre 7 jours et 180 jours, au niveau de l'échantillon. En effet, plus la date d'échéance est proche et plus l'erreur de prévision est faible et inversement. Nous reprenons cette idée dans la section V.3. Une autre raison à cette erreur élevée est l'hétérogénéité des prix des options. Les prix des calls S&P 500 observés étant compris entre 2,1\$ et 113,8\$, l'erreur de prévision, exprimée en terme nominal, a plus de chances d'être faible pour les options avec un prix faible et inversement pour les options avec un prix élevé. La condition première reste que le modèle de valorisation d'options utilisé soit pertinent. Enfin, nous constatons que les résultats obtenus, en employant une fonction LINEX au niveau de l'évaluation du modèle, diffèrent fortement des résultats obtenus avec les fonctions de perte MAE et RMSE. Nous savons que la fonction LINEX dépend du paramètre α qui modélise l'asymétrie de l'information. En d'autres termes, le poids alloué aux erreurs positives est supérieur au poids alloué aux erreurs négatives. D'après le graphique 1, nous constatons que, peu importe la méthode d'estimation, l'erreur de prévision minimale est obtenue quand le paramètre α est compris entre 0,5 et 0,9. Reste que la valeur donnée au paramètre α est très subjective et dépend de l'utilisateur.

Graphique 1 : Erreur de prévision avec la fonction de perte LINEX pour différentes valeurs du paramètre α et pour les 3 méthodes d'estimation



Plus précisément, l'annexe 6 présente *l'erreur de prévision par observation avec la fonction de perte LINEX, pour différentes valeurs du paramètre α et selon les différents modes d'estimation*. Nous constatons que pour la fonction LINEX, l'erreur de prévision par observation peut atteindre une amplitude infiniment grande pour un α qui tend vers ∞ , peu importe la méthode d'estimation utilisée. En revanche, lorsque nous faisons diminuer la valeur du paramètre α , l'erreur de prévision par observation tend à diminuer. Nous remarquons également que les différences, entre les erreurs de prévision par observation, sont faibles pour une valeur du paramètre α identique aux trois méthodes d'estimation. En outre, nous constatons que l'amplitude des erreurs de prévision, par observation et pour un paramètre α supérieur ou égal à 1, est plus importante lorsque nous utilisons la méthode des moments généralisés pour estimer les paramètres. La différence d'amplitude diminue pour un paramètre α inférieur à 1. Cette différence disparaît pour un paramètre α qui tend vers 0. Au final, peu importe le poids donné à l'asymétrie de l'information par l'utilisateur, l'erreur de prévision obtenue sera toujours supérieure en utilisant une fonction de perte LINEX. Plus généralement, il apparaît que ce n'est pas la méthode d'estimation des paramètres qui a le plus d'effet sur l'erreur de prévision, mais la méthode d'évaluation du modèle de valorisation d'options.

V.3 Le modèle autorégressif avec hétéroscédasticité conditionnelle GARCH(1,1)

Comme l'échantillon initial comprend essentiellement des données de coupe (calls à plusieurs prix d'exercice), nous ne pouvons pas utiliser un modèle dynamique pour analyser ces données. Dans cette section, nous isolons une série chronologique. Nous nous concentrons sur un call sur le S&P 500, dont le numéro d'identification est 21095096 dans la base de données *Ivy DB*, avec un prix d'exercice de 1100\$ et dont la date de création est le 24 juin 2003 et la date d'échéance est le 16 juin 2005. Le nombre total d'observations est de 500. Comme notre analyse porte sur une série chronologique qui comporte un prix d'exercice unique, nous ne pouvons pas utiliser la fonction de volatilité du modèle 3 qui dépend à la fois du prix d'exercice et de l'échéance. Nous sommes contraints d'utiliser uniquement les variables explicatives qui sont l'échéance et l'échéance au carré. Finalement, le modèle autorégressif avec hétéroscédasticité conditionnelle, GARCH(1,1), pour la fonction de volatilité est :

$$\sigma_t(\theta) = \theta_0 + \theta_1 T_t + \theta_2 T_t^2 + u_t \quad (28)$$

$$\tau_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 \tau_{t-1}^2 \quad (29)$$

où σ est la volatilité implicite, T l'échéance de l'option, T^2 l'échéance au carré de l'option, u le terme d'erreur et $u_t | T_t \sim N(0, \tau_t^2)$. Nous comparons le modèle GARCH(1,1) avec le modèle homoscédastique suivant :

$$\sigma_t(\theta) = \theta_0 + \theta_1 T_t + \theta_2 T_t^2 + u_t \quad (30)$$

où u_t iid $N(0, \tau^2)$ avec τ^2 constant. Les paramètres du modèle homoscédastique et du modèle GARCH(1,1) sont estimés par la méthode du maximum de vraisemblance. Les résultats sont présentés au tableau suivant :

Tableau 3 : Paramètres estimés et erreur de prévision pour le modèle homoscédastique et le modèle GARCH(1,1)

Modèle	Homoscédastique	GARCH(1,1)
Mode d'estimation	Maximum de Vraisemblance	
Constante	0,2660*	0,2224*
Échéance	-0,0006*	-0,0005*
Échéance au carré	8,27E-07*	7,37E-07*
Paramètre α^{**}	3,57	2,41
RMSE	104,0630	95,2712
MAE	91,7381	82,9429
LINEX	28,8025	39,0377

* Significatif au seuil de 5%

** Valeur du paramètre qui minimise l'erreur de prévision de la fonction LINEX

En comparant les deux modèles, nous constatons que pour la fonction de perte RMSE, l'erreur de prévision est supérieure de 8,7918\$ avec le modèle homoscédastique, soit 104,0630\$, comparativement à 95,2712\$ pour le modèle GARCH (1,1). Nous observons également une erreur de prévision supérieure de 8,7952\$ avec le modèle homoscédastique, soit 91,7381\$, comparativement à 82,9429\$ pour le modèle GARCH (1,1), lorsque nous utilisons la fonction de perte MAE. En revanche, pour la fonction LINEX, l'erreur de prévision est inférieure de 10,2352\$ avec le modèle homoscédastique, soit 28,8025\$, comparativement à 39,0377\$ pour le modèle GARCH(1,1). Plus généralement, l'erreur de prévision est la plus faible avec le modèle homoscédastique en utilisant la fonction de perte LINEX et est la plus importante, également avec le modèle homoscédastique, en utilisant la fonction de perte RMSE. La différence entre l'erreur de prévision minimale et maximale atteint 75,2605\$. Nous constatons aussi que l'erreur de prévision obtenue avec la fonction de perte LINEX est

inférieure à celles obtenues avec les deux autres fonctions de perte, pour la valeur du paramètre α qui minimise l'erreur de prévision, soit 3,57 pour le modèle homoscédastique et 2,41 pour le modèle GARCH (1,1). Globalement, nous observons une erreur de prévision plus importante que dans la première partie de l'analyse. La raison principale est le nombre plus faible de données. En effet, la taille de l'échantillon est de 500 observations contre 16028 auparavant. Nous pouvons ajouter le caractère aléatoire du choix de l'option, sous-entendant qu'avec une option différente, nous aurions pu obtenir une erreur de prévision moyenne plus faible. Intéressons-nous maintenant à l'erreur de prévision en fonction du temps présentée ci-après :

Graphique 2 : Erreur de prévision en fonction du temps pour le modèle GARCH (1,1)



Nous constatons que plus nous rapprochons de l'échéance, plus le prix estimé tend vers le prix observé et donc plus l'erreur est faible. Empiriquement, l'erreur de prévision tend à disparaître lors des 3 derniers mois, soit 7,5826\$ pour la fonction de perte RMSE, 5,3112\$ pour la fonction MAE et 5,4144\$ pour la fonction LINEX, avec une valeur du paramètre α qui minimise l'erreur de prévision fixée à 1,16. En revanche, l'erreur de prévision est particulièrement importante dans les 3 premiers mois pour la fonction RMSE, 150,6754\$, et la fonction MAE, 150,3495\$. Sur cette même période, l'erreur de prévision est beaucoup plus faible avec la fonction LINEX et tend vers 0 quand α tend vers ∞ . Pour RMSE et MAE, nous relevons que plus la date de création de l'option est éloignée de la date d'échéance, plus l'erreur de prévision est importante et inversement. Pour LINEX, l'erreur de prévision dépend en grande partie de la valeur donnée au paramètre α . L'erreur de prévision obtenue est donc toute relative puisque plus la période étudiée est proche de l'échéance et plus l'erreur de prévision est faible. Ce qui s'explique par moins d'incertitude sur la valeur finale du sous-jacent et donc sur le prix

de l'option. Une autre raison est que le volume de transactions augmente à proximité de l'échéance, ce qui se traduit par une liquidité de l'option plus importante. L'écart entre le prix estimé et le prix observé causé par l'illiquidité de l'option est alors plus faible. Ce qui implique une erreur de prévision qui est également plus faible. La série chronologique du volume de transactions est présentée à l'annexe 7 : *Volume de transactions sur le Call S&P 500 de la création à l'échéance de l'option*. Finalement, les résultats obtenus permettent d'avancer que le modèle ad-hoc de Black-Scholes et la fonction de volatilité sont appropriés, en particulier à proximité de l'échéance.

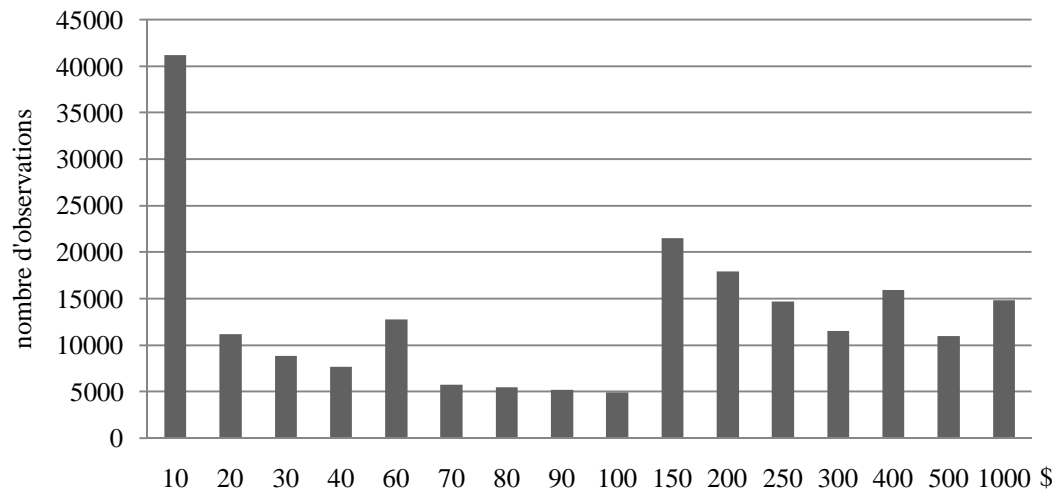
VI Conclusion

Nous relevons que l'erreur de prévision la plus faible est obtenue en utilisant la méthode des moments généralisés pour l'estimation des paramètres et la fonction de perte MAE au stade de l'évaluation du modèle. Globalement, nous constatons que l'erreur de prévision est élevée pour les différentes méthodes d'estimation et pour les différentes fonctions de perte. Nous l'expliquons par l'hétérogénéité des échéances des options et dans une moindre mesure par l'hétérogénéité des prix des options. Nous remarquons aussi que l'erreur de prévision obtenue avec la fonction de perte LINEX varie en fonction de la valeur donnée à α , qui modélise l'asymétrie de l'information, et qu'il n'existe pas de critère objectif pour attribuer une valeur particulière à α . Ce choix dépend entièrement de l'utilisateur. Nos résultats nous autorisent à dire que ce n'est pas le choix de la méthode d'estimation qui a le plus d'effet sur l'erreur de prévision, mais le choix de la fonction de perte utilisée au stade de l'évaluation du modèle. De plus, en nous concentrant sur la série chronologique d'une seule option et en comparant le modèle homoscédastique au modèle GARCH(1,1) pour la fonction de volatilité, nous constatons que l'erreur de prévision diminue à proximité de l'échéance. Nous l'expliquons par une baisse de l'incertitude sur le prix de l'option et par l'augmentation de la liquidité de l'option. Au final, il ne faut pas comparer les erreurs de prévision pour des fonctions de perte différentes. Il faut choisir une fonction de perte et s'y tenir.

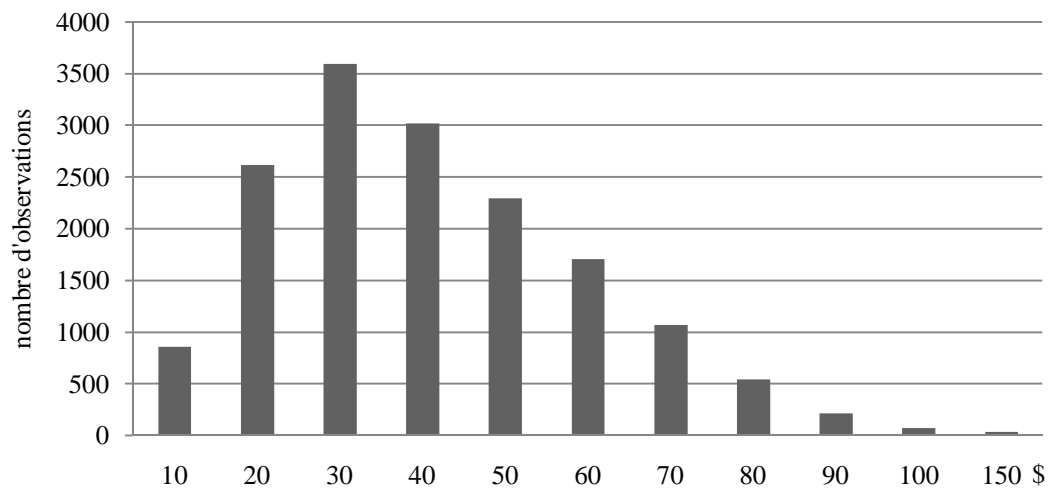
Annexes

Annexe 1 : Distribution des prix observés des calls S&P 500 avant filtrage des données	26
Annexe 2 : Distribution des prix observés des calls S&P 500 après filtrage des données	26
Annexe 3 : Corrélations entre les instruments utilisés pour la méthode des moments généralisés	27
Annexe 4 : Paramètres estimés de la fonction de volatilité pour le modèle 3	28
Annexe 5 : Erreurs de prévision par observation pour les méthodes MCO, MMG et MV et pour les fonctions de perte RMSE, MAE et LINEX	29
Annexe 6 : Erreur de prévision par observation pour la fonction de perte LINEX, selon différentes valeurs du paramètre α et selon les différents modes d'estimation	30
Annexe 7 : Volume de transactions sur le call S&P 500 de la création à l'échéance de l'option	31

Annexe 1 : Distribution des prix observés des calls S&P 500 avant filtrage des données



Annexe 2 : Distribution des prix observés des calls S&P 500 après filtrage des données



Annexe 3 : Corrélations entre les instruments utilisés pour la méthode des moments généralisés

	K	K^2	TJ	TJ^2	K*TJ	VOL^2	VOL*TJ	VOL*TJ*K	DELTA*TJ	DELTA*TJ*K	VEGA	VEGA^2	VEGA*K	VEGA*TJ	VEGA*TJ*K	RESID
K	1.000000	0.999259	-0.009526	-0.021083	0.097790	0.086204	0.105256	0.132539	-0.034991	0.072878	0.197010	0.195991	0.350573	0.059006	0.126584	-1.54E-13
K^2	0.999259	1.000000	-0.009834	-0.020957	0.097387	0.086258	0.104324	0.132000	-0.034966	0.072559	0.196522	0.196183	0.350768	0.058914	0.126683	-2.14E-11
TJ	-0.009526	-0.009834	1.000000	0.947469	0.991017	-0.040948	0.150148	0.146147	0.967132	0.961488	0.906631	0.936774	0.855770	0.974582	0.958927	-4.43E-14
TJ^2	-0.021083	-0.020957	0.947469	1.000000	0.935657	-0.040563	0.104312	0.100983	0.921877	0.913339	0.787700	0.879067	0.739763	0.977369	0.959052	-7.67E-15
K*TJ	0.097790	0.097387	0.991017	0.935657	1.000000	-0.033975	0.163430	0.163206	0.955251	0.967414	0.926837	0.962794	0.898200	0.978507	0.976527	5.27E-16
VOL^2	0.086204	0.086258	-0.040948	-0.040563	-0.033975	1.000000	0.628224	0.634722	-0.062369	-0.055937	0.006053	-0.006822	0.018114	-0.030951	-0.026866	-0.062075
VOL*TJ	0.105256	0.104324	0.150148	0.104312	0.163430	0.628224	1.000000	0.996822	0.075296	0.088421	0.237930	0.223167	0.245729	0.157145	0.164832	-0.093280
VOL*TJ*K	0.132539	0.132000	0.146147	0.100983	0.163206	0.634722	0.996822	1.000000	0.072794	0.089267	0.238813	0.225680	0.252379	0.155740	0.166223	-0.093167
DELTA*TJ	-0.034991	-0.034966	0.967132	0.921877	0.955251	-0.062369	0.075296	0.072794	1.000000	0.990975	0.810999	0.845419	0.761022	0.921685	0.904850	0.075188
DELTA*TJ*K	0.072878	0.072559	0.961488	0.913339	0.967414	-0.055937	0.088421	0.089267	0.990975	1.000000	0.834144	0.873975	0.805714	0.928833	0.925320	0.076588
VEGA	0.197010	0.196522	0.906631	0.787700	0.926837	0.006053	0.237930	0.238813	0.810999	0.834144	1.000000	0.964864	0.984012	0.885781	0.891628	-0.092326
VEGA^2	0.195991	0.196183	0.936774	0.879067	0.962794	-0.006822	0.223167	0.225680	0.845419	0.873975	0.964864	1.000000	0.956553	0.958067	0.969474	-0.057186
VEGA*K	0.350573	0.350768	0.855770	0.739763	0.898200	0.018114	0.245729	0.252379	0.761022	0.805714	0.984012	0.956553	1.000000	0.851976	0.874261	-0.089227
VEGA*TJ	0.059006	0.058914	0.974582	0.977369	0.978507	-0.030951	0.157145	0.155740	0.921685	0.928833	0.885781	0.958067	0.851976	1.000000	0.994329	-0.015043
VEGA*TJ*K	0.126584	0.126683	0.958927	0.959052	0.976527	-0.026866	0.164832	0.166223	0.904850	0.925320	0.891628	0.969474	0.874261	0.994329	1.000000	-0.015257
RESID	-1.54E-13	-2.14E-11	-4.43E-14	-7.67E-15	5.27E-16	-0.062075	-0.093280	-0.093167	0.075188	0.076588	-0.092326	-0.057186	-0.089227	-0.015043	-0.015257	1.000000

Annexe 4 : Paramètres estimés de la fonction de volatilité pour le modèle 3

	Coefficient	Erreur Standard	t-Statistique	p-valeur
MCO				
Constante	0,7895*	0,0285	27,6823	0,0000
Prix d'exercice	-0,0010*	0,0000	-22,6289	0,0000
Prix d'exercice au carré	3,55E-07*	1,60E-08	22,2344	0,0000
Échéance	-0,0005*	0,0001	-8,0850	0,0000
Échéance au carré	2,06E-06*	1,01E-07	20,3622	0,0000
terme d'interaction	1,50E-07*	4,47E-08	3,3552	0,0008
R2	0,0582			
GMM				
Constante	0,7850*	0,0260	30,2032	0,0000
Prix d'exercice	-0,0010*	3,92E-05	-24,6425	0,0000
Prix d'exercice au carré	3,50E-07*	1,47E-08	23,8388	0,0000
Échéance	-0,0003*	4,69E-05	-6,7424	0,0000
Échéance au carré	9,39E-07*	8,00E-08	11,7335	0,0000
terme d'interaction	1,82E-07*	3,42E-08	5,3291	0,0000
R2	0,0536			
MV				
Constante	0,7986*	0,0406	19,6742	0,0000
Prix d'exercice	-0,0010*	0,0001	-15,9830	0,0000
Prix d'exercice au carré	3,62E-07*	2,34E-08	15,4656	0,0000
Échéance	-0,0004*	0,0001	-3,7058	0,0002
Échéance au carré	1,54E-06*	1,66E-07	9,2692	0,0000
terme d'interaction	1,55E-07*	7,84E-08	1,9791	0,0478
v (degrés de liberté)	12**			
LOG-VRAISEMBLANCE	22178,90			
R2	0,0513			

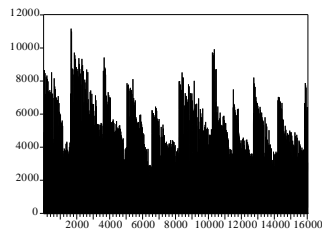
*Significatif au seuil de 5%

**Valeur du paramètre v pour laquelle la log-vraisemblance est la plus élevée

Annexe 5 : Erreurs de prévision par observation pour les méthodes MCO, MMG et MV et pour les fonctions de perte MSE, MMG et MV

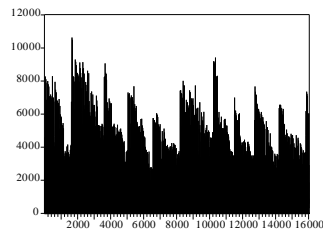
Méthode MCO

Fonction de perte MSE



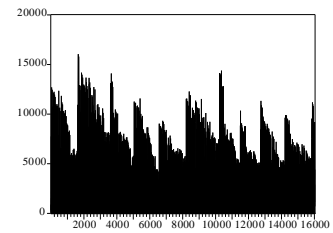
Méthode MMG

Fonction de perte MSE



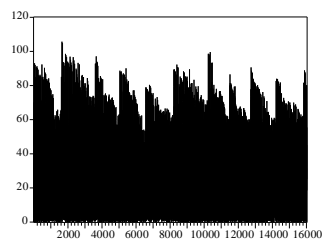
Méthode MV

Fonction de perte MSE



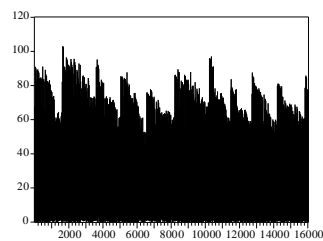
Méthode MCO

Fonction de perte MAE



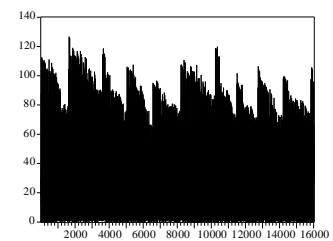
Méthode MMG

Fonction de perte MAE



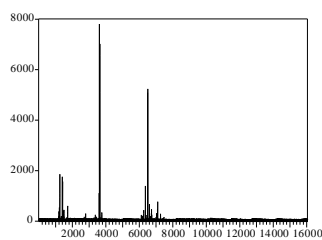
Méthode MV

Fonction de perte MAE



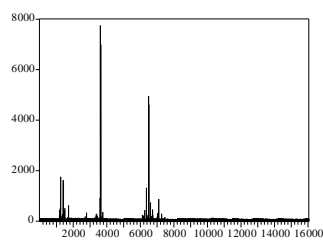
Méthode MCO

Fonction de perte LINEX



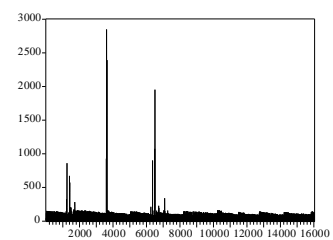
Méthode MMG

Fonction de perte LINEX

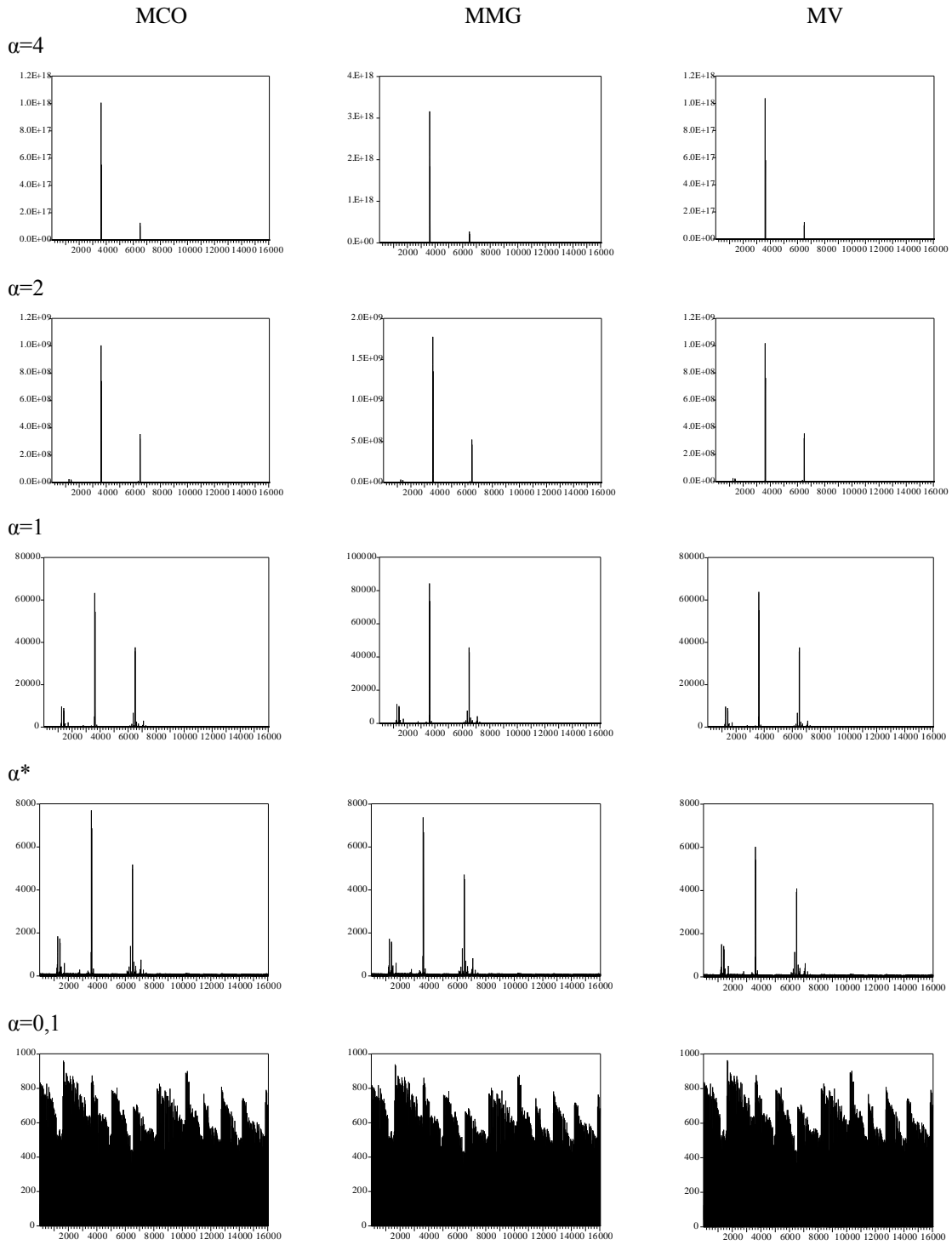


Méthode MV

Fonction de perte LINEX

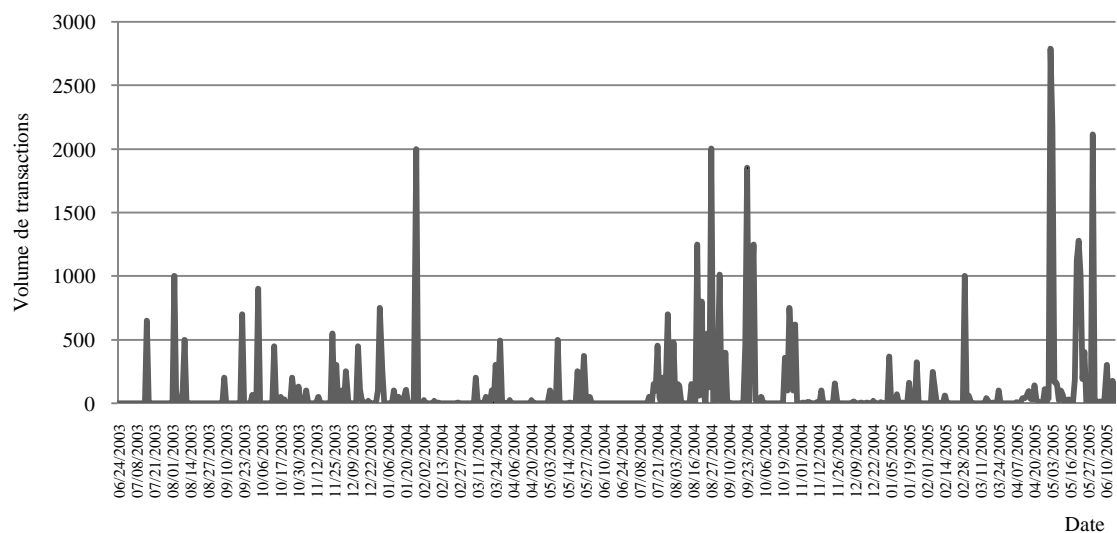


Annexe 6 : Erreur de prévision par observation pour la fonction de perte LINEX, selon différentes valeurs du paramètre α et selon les différents modes d'estimation



*Valeur du paramètre qui minimise l'erreur de prévision moyenne

Annexe 7 : Volume de transactions sur le call S&P 500 de la création à l'échéance de l'option



Références

Bakshi, C., C. Cao and Z. Chen (1997) : "Empirical performance of alternative option pricing models", *Journal of Finance* 52, 2003-2049

Bams, D., T. Lehnert and C.C.P. Wolff (2004) : "Loss Functions in Option Valuation: A Framework for Model Selection", *C.E.P.R. Discussion Papers* No 4960

Benzoni, L., (2002) : "Pricing options under stochastic volatility: Exchange rate processes implicit in Deutschemark options", *Review of financial Studies* 9, 69-107

Black, F., Scholes, M., (1973) : "The pricing of options and corporate liabilities", *Journal of Political Economy* 81, 525-550

Chen A., (1970) : "A Model of Warrant Pricing in a Dynamic Market", *The Journal of Finance* 25 No 5, 1041-1059

Chernov, M. and E. Ghysels (2000) : "A study towards a unified approach to the joint estimation of objective and risk-neutral measures for the purpose of option valuation ", *Journal of Financial Economics* 56, 407-458

Christoffersen, P. and K. Jacobs (2002) : "The Importance of the Loss Function in Option Valuation", *Journal of Financial Economics* 72(2), 291-318

Dumas, B., J. Fleming and R.E. Whaley (1998) : "Implied Volatility Functions: Empirical Tests", *Journal of Finance* 53, 2059-2106

Engle, R.F. (1993) : "A comment on Hendry and Clements on the limitations of comparing mean squared forecast errors", *Journal of Forecasting* 12, 642-644

Gallant, A. R., and Tauchen, G. (1996) : "Which Moments to Match?," *Econometric Theory*, 12, 657-681

Heston, S.L. and S. Nandi (2000) : "A Closed-Form GARCH Option Valuation Model", *The Review of Financial Studies* 3, 585-625

Hull, J., (2002) : "Options, futures and other derivatives", 5th eds, Prentice Hall, 744 p.

Lee T. H., (2007) : "Loss Functions in Time series forecasting", *University of California, Riverside*, Unpublished Working Paper

Nelson D., (1991) : "Conditional Heteroskedasticity in assets returns", *Econometrica* 59, 347-370

Nordstadt J., (1999) : "Black-Scholes the Easy Way", *Nordstadt J. website*, Unpublished Working Paper

Pan, J. (2002) : "How important is the correlation between returns and volatility in a stochastic volatility model? Empirical evidence from pricing and hedging in the S&P 500 index options market", *Journal of Financial Economics*, 63, 3-50

Varian H.R., (1974) : "A Bayesian Approach to Real Estate Assessment", *Studies in Bayesian Econometrics and Statistics in Honor of L.J. Savage*, eds. S.E. Fienberg and A. Zellner, Amsterdam: North Holland, 195-208

White H., (1980) : "A Heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimator and a direct test for Heteroskedasticity", *Econometrica* 48, 817-838

Zellner A., (1986) : "Bayesian Estimation and Prediction Using Asymmetric Loss Functions", *Journal of the American Statistical Association* 81, 416-451